## 8. POLINOMI

Zadaci posuđeni iz knjige:
Zbirka riješenih zadataka i problema iz Matematike sa osnovama teorije i ispitni zadaci;
Behdžet A. Mesihović, Šefket Z. Arslanagić;

1. *Funkcija oblika*

$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_kx^{n-k}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=\sum_{k=0}^{n} a_kx^{n-k}$, gdje je $n$ prirodan broj, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $(a_0\neq 0)$ realni ili kompleksni brojevi, a $x$ realna ili kompleksna promjenljiva, naziva se *polinom* ili *cijela racionalna funkcija*. Broj $n$ naziva se *stepen* polinoma.

2. *Osnovni stav algebre* (ili Gausov* stav) glasi:
Svaki polinom stepena $n(\geqslant 1)$ ima bar jednu nulu u skupu kompleksnih brojeva.

3. *Bezuova** teorema*. Pri dijeljenju polinoma $P_n(x)$ razlikom $(x-x_1)$ dobija se ostatak koji je jednak $P_n(x_1)$. Kao posljedica Bezuovog stava izvodi se slijedeća teorema: ako je $x_1$ nula polinoma, tj. $P_n(x_1)=0$, onda je polinom $P_n(x)$ djeljiv (bez ostatka) razlikom $(x-x_1)$.

4. Na osnovu Gausovog i Bezuovog stava izvodi se slijedeća teorema: svaki polinom $n$-tog stepena može se napisati u obliku:

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

gdje su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nule polinoma, a $a_0\neq 0$ koeficijent uz $x^n$.

5. Ako polinom $P_n(x)$ ima jednu nulu oblika $a+bi$, onda mora imati i drugu nulu oblika $a-bi$, ukoliko su koeficijenti polinoma realni brojevi.

6. a) Kaže se da su polinomi $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ *identički jednaki* ako dobiju jednake vrijednosti za svako $x$.
   b) Potreban i dovoljan uslov da polinomi $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ budu identički jednaki je da koeficijenti njihovih odgovarajućih članova budu jednaki.

7. *Vietove*** formule*
Posmatrajmo polinom

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

i predstavimo ga u obliku

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

gdje su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nule polinoma $P_n(x)$.

Iz identiteta

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

prema stavu 6.b), slijede formule:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=-\frac{a_1}{a_0},$$

$$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=\frac{a_2}{a_0},$$

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\frac{a_3}{a_0},$$

$$\vdots$$

$$x_1x_2\ldots x_k+\ldots+x_{n-k+1}x_{n-k+2}\ldots x_n=(-1)^k\frac{a_k}{a_0},$$

$$\vdots$$

$$x_1x_2\ldots x_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

8. Ako algebarska jednačina $n$-tog stepena $P_n(x)=0$ sa cijelim koeficijentima $a_k\in Z$, $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$ ima racionalan korijen $\frac{p}{q}$, $(p\in Z,\ q\in N)$, $(p, q)=1$, tada je $p$ djelitelj od $a_n$ i $q$ djelitelj od $a_0$.

9. Svaki polinom $P_n(x)$ stepena $n$ može se, na jedinstven način, predstaviti u obliku

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_r)^{k_r},$$

gdje su svi $x_1, x_2, \ldots, x_r$ različiti brojevi, $k_1, k_2, \ldots, k_r$ prirodni brojevi, takvi da je $k_1+k_2+\ldots+k_r=n$ i $a_0$ koeficijent uz najstariji član polinoma $P_n(x)$.

Broj $k_i$ zovemo redom *višestrukosti* korijena $x_i$ $(i=\overline{1, r})$.

10. *Hornerov* postupak (shema)*
Pri dijeljenju polinoma

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

binomom $x-x_1$, dolazimo do identiteta

$$P_n(x)=(x-x_1)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1})+R,$$

* Carl Friedrich Gauss (1777–1855), njemački matematičar.
** Etienne Bézout (1730–1783), francuski matematičar.
*** François Viète (1540–1603), francuski matematičar.

* William George Horner (1773–1827).

gdje je $R$ ostatak dijeljenja nezavisan od $x$ i gdje su $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ privremeno neodređeni koeficijenti.

Za izračunavanje koeficijenata $b_k\ (k=\overline{0, n-1})$ i ostatka $R$ praktično je upotrijebiti *Hornerov postupak* (shemu), koji se zapisuje ovako:

$$\begin{array}{c|cccccccc}
x_1 & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{k+1} & \ldots & a_n \\
\hline
 & a_0 & \underbrace{x_1 b_0 + a_1} & \underbrace{x_1 b_1 + a_2} & \ldots & \underbrace{x_1 b_k + a_{k+1}} & \ldots & \underbrace{x_1 b_{n-1} + a_n} \\
 & = b_0 & = b_1 & = b_2 & & = b_{k+1} & & = R.
\end{array}$$

**11.** Prostim ili parcijalnim razlomcima (u polju realnih brojeva) smatraju se funkcije oblika:

$$x \to \frac{A}{(x-a)^k}, \ (k \in N;\ A,\ a \in R);\ x \to \frac{MX+N}{(x^2+px+q)^k}, \ (k \in N,\ p^2-4q<0).$$

**12.** Svaka nesvodljiva prava racionalna funkcija $x \to \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ $(m<n)$ može se na jedinstven način rastaviti na parcijalne razlomke oblika

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k},$$ gdje je $k$ red korijena $a$ i

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_lx+N_l}{(x^2+px+q)^l},$$

gdje je $l$ red faktora $x^2+px+q$ u polinomu $Q_n(x)$ $(p^2-4q<0)$, tj. kvadratni faktor odgovara paru konjugovano kompleksnih korijena reda $l$ realnog polinoma $Q_n(x)$).

## ZADACI

1. Neka je $P(x)$ polinom petog stepena i neka on ima jednu trostruku nulu $x=1$ i jednu dvostruku nulu $x=-2$. Odrediti polinom $P(x)$ ako je $P(2)=48$.

2. Odrediti realan polinom najmanjeg stepena čije su nule:
   a) $x_1=2,\ x_2=1+i,\ x_3=1+2i$; b) $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=1-i$.

3. Podijeliti slijedeće polinome:
   a) $2x^4-3x^3+4x^2+5x+6$ sa $x^2-3x+1$; b) $x^3-3x^3-x-1$ sa $3x^2-2x+1$.

4. Neka je $P(x)$ realan polinom četvrtog stepena i neka on ima nule prvog reda $x=-1$, $x=2$ i $x=2+i$. Odrediti polinom $P(x)$ ako je $P(0)=20$.

5. Neka je $P(x)$ realan polinom petog stepena i neka on ima dvostruku nulu $x=2i$. Odrediti polinom $P(x)$ ako je $P(0)=-8$ i $P(2)=32$.

6. Ako je $x=2$ nula polinoma $x^3-6x^2+21x-26$, odrediti ostale nule toga polinoma.

7. Odrediti racionalne brojeve $p$ i $q$, tako da $x_1=1+\sqrt{3}$ bude nula polinoma $P(x)=x^4+px^3+qx^2+6x+2$. Za tako određene vrijednosti parametara $p$ i $q$ naći ostale nule polinoma $P(x)$.

8. Pokazati da je kompleksan broj $x_1=1+i$ nula polinoma $x^3-2x+4$, a zatim odrediti ostale nule toga polinoma.

9. Naći nule polinoma $P(x)=x^4+1$.

10. Odrediti realne brojeve $p$ i $q$, tako da $x=1$ bude dvostruka nula polinoma

    $P(x)=px^4+qx^3-x+1$.

    Za tako određene vrijednosti $p$ i $q$ naći ostale nule polinoma $P(x)$.

11. Pokazati da je polinom $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ potpun kvadrat.

12. Odrediti ostatak pri dijeljenju polinoma $x^8-2x^5+1$ polinomom $x^2-1$.

13. Odrediti koeficijente $a$, $b$, $c$ realnog polinoma $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$, tako da:
    a) polinom bude djeljiv binomima $x-1$, $x+2$, a da podijeljen binomom $x-4$ daje ostatak 18;
    b) polinom bude djeljiv binomom $x-i$, a da podijeljen binomom $x+1$ daje ostatak $-5$.

14. Pokazati da je polinom $P_n(x)$ djeljiv polinomom $Q(x)$:
    a) $P_n(x)=(x-1)^{2n}-x^{2n}+2x+1$, $Q(x)=2x^3-3x^2+x$, $n \in N$;
    b) $P_n(x)=x^{6n+2}+x^{3n+1}+1$, $Q(x)=x^2+x+1$, $(n=0, 1, 2, \ldots)$;
    c) $P_n(x)=x(x^{n-1}-na^{n-1})+a^n(n-1)$, $Q(x)=(x-a)^2$.

15. Pokazati da su polinomi:
    a) $x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$; b) $x^{2n+1}-(2n+1)x^{n+1}+(2n+1)x^{n-1}$;
    c) $(n-2m)x^n-nx^{n-m}+nx^m-(n-2m)$ djeljivi sa $(x-1)^3$.

16. Dat je polinom $x^3-6x^2-\lambda$, $\lambda \in R$. Diskutirati broj i prirodu korijena ovog polinoma za razne $\lambda$.

17. U kojim granicama mora varirati $\lambda$ da bi jednačina $3x^4-4x^3-12x^2+\lambda=0$ imala sva četiri realna korijena?

18. Data je algebarska jednačina $ax^6+bx+1=0$, $(a, b \in R)$. Odrediti $a$ i $b$, tako da je $x=1$ dvostruki korijen jednačine.

19. Odrediti racionalne korijene polinoma:
    a) $x^4+2x^3-13x^2-38x-24$; b) $x^3-6x^2+15x-14$;
    c) $x^5-2x^4-4x^3+4x^2-5x+6$; d) $2x^3+3x^2-1$.

20. Napisati Viètove formule za polinome:
    a) trećeg stepena $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$;
    b) četvrtog stepena $a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$.

**21.** Znajući da je zbir dva korijena jednačine $2x^3-x^2-7x+\lambda=0$ jednak 1, odrediti parametar $\lambda$.

**22.** Dat je polinom $P(x)=x^3+2x^2-5x-6$, $P(2)=0$. Pomoću Viètovih formulâ naći ostale korijene jednačine $P(x)=0$.

**23.** Naći ostale nule realnog polinoma $P(x)=x^3+a^2x+10a^3$ ako se zna da je jedna nula $x_1=a(1+2i)$.

**24.** Naći vezu između koeficijenata $a$, $b$, $c$, tako da korijeni jednačine $x^3+ax^2+bx+c=0$ obrazuju geometrijsku progresiju.

**25.** Odrediti realan parametar $a$, tako da konjugovano kompleksni korijeni jednačine $z^4-2az^3+18z^2-24z+16=0$ budu tjemenâ trapeza čiji produžeci krakova prolaze kroz koordinatni početak.

**26.** Koristeći Hornerovu shemu, napisati rezultat dijeljenja polinoma $15x^4-13x^3+2x-1$ binomom $x-2$.

**27.** Ispitati pomoću Hornerove sheme da li je:

a) $x=2$ jednostruka nula; b) $x=3$ dvostruka nula

polinoma $P_5(x)=x^5-8x^4+22x^3-26x^2+21x-18$.

**28.** Polinom $x^5-2x^4+3x^3-4x^2+2x+5$ razviti po stepenima osnove $x-1$ pomoću Hornerove sheme.

**29.** Dokazati identitet

$(1+x+x^2+\ldots+x^n)^2-x^n=(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})(1+x+x^2+\ldots+x^{n+1})$, $n\in N$.

**30.** Ako je $n$ paran broj, tada polinom $P(x)=(x+1)^n-x^n-1$ nije djeljiv sa $x^2+x+1$. Dokazati.

**31.** Odrediti polinom $P(x)$ petog stepena koji zadovoljava ova dva uslova:

(1) $(x-1)^3|\{P(x)+1\}$, (2) $(x+1)^3|\{P(x)-1\}$.

**32.** $P(x)$ je polinom čiji su koeficijenti cijeli brojevi. Pokazati da iz uslova $6|P(2)$ i $6|P(3)$ slijedi $6|P(5)$.

**33.** Pri kakvim uslovima vrijedi:

a) $x^2+mx-1$ je djelitelj od $x^3+px+q$;

b) $x^2+mx+1$ je djelitelj od $x^4+px+q$.

**34.** Uprostiti polinom

$$P_n(x)=1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}.$$

**35.** Koristeći Hornerovu shemu, razložiti polinom $P(x)$ po stepenima od $x-x_0$:

a) $P(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+1$, $x_0=-1$; b) $P(x)=x^5$, $x_0=1$;

c) $P(x)=x^4-8x^3+24x^2-50x+90$, $x_0=2$;

d) $P(x)=x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i$, $x_0=-i$.

**36.** Koristeći Hornerovu shemu, razložiti po stepenima od $x$ $P(x+3)$ ako je $P(x)=x^4-x^3+1$.

**37.** Rastavi na linearne faktore:

a) $\cos(n\arccos x)$; b) $(x+\cos a+i\sin a)^n-(x-\cos a-i\sin a)^n$.

**38.** Razložiti na nerazložive realne faktore slijedeće polinome:

a) $x^4+4$; b) $x^6+27$; c) $x^4+4x^3+4x^2+1$;

d) $x^{2n}-2x^n+2$; e) $x^4-ax^2+1$, $|a|<2$.

**39.** Provjeriti razlaganja racionalnih funkcija na proste razlomke:

a) $\dfrac{x-1}{x^3+3x^2+2x}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{x+1}$;

b) $\dfrac{x+2}{(x-1)(x-2)^2}=\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{4}{(x-2)^2}$;

c) $\dfrac{x+2}{(x^2-1)(x^2+1)^2}=\dfrac{3}{8}\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{8}\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{-x/2-1}{(x^2+1)^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{x+1}{x^2+1}$;

d) $\dfrac{2x^4+2x^2-5x+1}{x(x^2+x+1)^2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x-3}{x^2+x+1}+\dfrac{x-4}{(x^2+x+1)^2}$;

e) $\dfrac{2n+1}{x^{2n-1}-1}=\dfrac{1}{x-1}+2\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}-1}{x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1}$;

f) $\dfrac{n}{x^{2n}-1}=\dfrac{1}{x^2-1}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{x\cos\frac{k\pi}{n}-1}{x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1}$;

g) $\dfrac{n!}{x(x-1)\ldots(x-n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\dbinom{n}{k}\dfrac{1}{x-k}$;

h) $\dfrac{(2n)!}{x(x^2-1)(x^2-4)\ldots(x^2-n^2)}=\sum\limits_{k=-n}^{n}(-1)^{n-k}\dbinom{2n}{n+k}\dfrac{1}{n-k}$.

**40.** Dokazati da postoji broj $a$ takav da je polinom $x^6-15x^3-8x^2+2$ djeljiv polinomom $x^2+ax+1$.

**41.** Koristeći identitet

(1) $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{1}{a-b}\left(\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x-b}\right)$,

dokazati

$$(2)\ \frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2}=\frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{(x-a)^2}+\frac{1}{(x-b)^2}\right)+\frac{2}{(a-b)^3}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right);$$

$$(3)\ \frac{1}{(x-a)^3(x-b)^3}=\frac{1}{(a-b)^3}\left(\frac{1}{(x-a)^3}-\frac{1}{(x-b)^3}\right)-$$

$$-\frac{3}{(a-b)^4}\left(\frac{1}{(x-a)^2}+\frac{1}{(x-b)^2}\right)+\frac{6}{(a-b)^5}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right).$$

## RJEŠENJA

1. Polinom $P(x)$ ima oblik $P(x)=a_0(x-1)^3(x+2)^2$. Iz uslova $P(2)=48$ slijedi da je $a_0=3$. Prema tome, biće $P(x)=3(x-1)^3\cdot(x+2)^2$.

2. a) Imamo $x_4=\overline{x}_2=1-i$, $x_5=\overline{x}_3=1-2i$, te je

$$P_5(x)=(x-2)(x-1-i)(x-1+i)(x-1+2i)(x-1-2i)=(x-2)(x^2-2x+2)(x^2-2x+5);$$

b) $x_4=\overline{x}_3=1+i$, te je $P_4(x)=(x-1)(x-2)(x-1+i)(x-1-i)=(x-1)(x-2)(x^2-2x+2)$.

3. a) Količnik je $2x^2+3x+11$, ostatak $35x-5$; b) količnik je $\frac{1}{9}(3x-7)$, ostatak je $\frac{1}{9}(-26x-2)$.

4. Nula polinoma $P(x)$ je i kompleksan broj $\overline{x}=2-i$. Polinom ima oblik $P(x)=a_0(x+1)(x-2)(x^2-4x+5)$. Iz uslova $P(0)=20$ slijedi da je $a_0=-2$. Dakle, biće $P(x)=-2(x+1)(x-2)(x^2-4x+5)$.

5. $P(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x^2+4)^2$.

6. Ako je $x_1=2$ nula polinoma $x^3-6x^2+21x-26$, dijeljenjem tog polinoma bionomom $x-2$ dobijamo $x^2-4x+13=0$, tj. $x_{2,3}=2\pm 3i$.

7. Kako je $x_1=1+\sqrt{3}$ nula polinoma $P(x)$ sa racionalnim koeficijentima, onda je njegova nula i realan broj $x_2=1-\sqrt{3}$. Stoga je polinom $P(x)$ djeljiv polinomom $x^2-2x+2$. Iz identiteta

$$x^4+px^3+qx^2+6x+2\equiv(x^2-2x-2)(x^2+bx+c)$$

dobijamo $p=-4$ i $q=1$. Dakle, ostale nule polinoma $P(x)$ su $x_3=1+\sqrt{2}$ i $x_4=1-\sqrt{2}$.

8. Imamo $(1+i)^3-2(1+i)+4=1+3i+3i^2+i^3-2i-2+4=1+3i-3-i-2i+2=0$.

9. Polinom $P(x)$ možemo predstaviti u obliku

$$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2=(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1),$$ odakle dobijamo

$x_{1,2}=(1\pm i)\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_{3,4}=(-1\pm i)\frac{\sqrt{2}}{2}$, nule polinoma $P(x)$.

10. $p=1$, $q=-1$, $x_3=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$, $x_4=\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$.

11. $(x^2+3x+1)^2$.

12. Odredimo realne brojeve $p$ i $q$ iz identiteta $x^8-2x^5+1=(x^2-1)K(x)+px+q$,

gdje je $K(x)$ polinom osmog stepena. Odatle za $x=1$ i $x=-1$ dobijamo sistem jednačina $p+q=0$, $-p+q=4$, čije je rješenje $p=-2$, $q=2$. Dakle, ostatak pri dijeljenju polinoma je $-2x+2$.

13. a) Iz uslova $P(1)=0$, $P(-2)=0$ i $P(4)=18$ dobijamo sistem jednačina: $a+b+c=-1$, $4a-2b+c=8$, $16a+4b+c=-46$, čije je rješenje $a=-2$, $b=-5$, $c=6$; dakle, $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$;

b) iz uslova $P(i)=0$, $(P(-i)=0)$, $P(-1)=-5$ dobijamo polinom $P(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$.

14. a) Nule polinoma $Q(x)=2x^3-3x^2+x$ su $x=0$, $x=1$ i $x=\frac{1}{2}$. Za te iste vrijednosti se anulira i polinom $P_n(x)=(x-1)^{2n}-x^{2n}+2x-1$, pa je prema Bezuovom stavu tvrđenje tačno;

b) nule polinoma $Q(x)=x^2+x+1$ su $x_{1,2}=\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$, odnosno $x_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$, $x_2=\overline{x}_1$. Lako se provjerava da je i $x_1$ nula polinoma $P_n(x)$ (koristiti Moavrovu formulu). Naravno, $x_2=\overline{x}_1$ mora, takođe, biti nula polinoma $P_n(x)$. Znači, polinom $P_n(x)$ je djeljiv polinomom $Q(x)$.

c) rastavljajući polinom $P_n(x)$ na faktore, dobija se da je jedan njegov faktor $(x-a)^2$, što znači da je polinom $P_n(x)$ djeljiv polinomom $Q(x)$.

15. a), b), c) Treba provjeriti da važi $P(1)=P'(1)=P''(1)=0$.

16. Posmatrati funkcije $y=x^3-6x^2$ i $y=\lambda$ i nacrtati njihove grafike. Dobijamo: za $\lambda\in(-\infty,-32)$ polinom ima jedan realan korijen; za $\lambda=-32$ tri realna korijena od kojih je jedan dvostruki; za $\lambda\in(-32,0)$ tri realna različita korijena; za $\lambda=0$ tri korijena od kojih je jedan dvostruki; za $\lambda>0$ jedan realan korijen.

17. Ispitati funkciju $y=\lambda=-3x^4+4x^3+12x^2$; $\lambda\in[0,5]$.

18. Treba da je $f(1)=0$ i $f'(1)=0$, tj. $a+b+1=0$ i $6a+b=0$. Odavde dobijamo da je $a=\frac{1}{5}$, $b=-\frac{6}{5}$.

19. a) Koristeći 8., nalazimo korijene $x\in\{-1,-2,-3,4\}$;

b) $x=2$; c) $x\in\{1,-2,3\}$; d) $x\in\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$, $x_1=-1$ je dvostruki korijen.

20. a) $x_1+x_2+x_3=-\frac{a_1}{a_0}$; $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{a_2}{a_0}$; $x_1x_2x_3=-\frac{a_3}{a_0}$;

b) $x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{a_1}{a_0}$, $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\frac{a_2}{a_0}$,

$x_1x_3x_4+x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_2x_3x_4=-\frac{a_3}{a_0}$, $x_1x_2x_3x_4=\frac{a_4}{a_0}$.

21. Prema Viètovim formulama $x_1+x_2+x_3=\frac{1}{2}$, $x_1x_2+(x_1+x_2)x_3=-\frac{7}{2}$, $x_1x_2x_3=-\frac{\lambda}{2}$, a prema pretpostavci da je $x_1+x_2=1$, odavde dobijamo da je $x_3=-\frac{1}{2}$ i $x_1x_2=-3$, te je $\lambda=-3$.

22. Imamo $x_1+x_2+x_3=-2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-5$, $x_1x_2x_3=6$; te zbog $x_3=2$ je $x_1+x_2=-4$, $x_1x_2=3$, tj. $x_1=-1$, $x_2=-3$.

23. Pošto je $x_1=a(1+2i)$, to je $x_2=\overline{x}_1=a(1-2i)$, a odavde $x_1x_2=5a^2$. Iz Viètove formule $x_1x_2x_3=-10a^3$ dobijamo sada $x_3=-2a$.

24. Imamo $x_1$, $x_2=x_1q$, $x_3=x_1q^2$. Iz Viètovih formulâ dobijamo vezu $a^3c=b^3$.

25. Stavljajući da je $z_1=\varrho_1\operatorname{cis}\varphi$, $z_3=\overline{z}_1=\varrho_1\operatorname{cis}(-\varphi)$, $z_2=\varrho_2\operatorname{cis}\varphi$, $z_4=\overline{z}_2=\varrho_2\operatorname{cis}(-\varphi)$ u Viètove formule

$z_1+\overline{z}_1+z_2+\overline{z}_2=2a$, $z_1\overline{z}_1+z_1z_2+z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2+\overline{z}_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_2=18$,

$z_1\overline{z}_1z_2+z_1\overline{z}_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2\overline{z}_2+z_1z_2\overline{z}_2=24$, $z_1\overline{z}_1z_2\overline{z}_2=16$, dobijamo $a=3$.

**26.** Rezultat dijeljenja polinoma $15x^4-13x^3+2x-1$ sa $x-2$ dât je pregledno Hornerovom shemom:

$$\begin{array}{c|ccccc} 2 & 15 & -13 & 0 & 2 & -1 \\ \hline & 15 & 17 & 34 & 70 & 139 \end{array}$$

Dakle, ostatak dijeljenja je 139, dok je djelimični količnik $15x^3+17x^2+34x+70$.

**27.** Odgovor je potvrdan, pa je $P_5(x)=(x-2)(x-3)^2(x^2+1)$.

**28.** Koristeći Hornerovu shemu, dobijamo da je

$x^5-2x^4+3x^3-4x^2+2x+5=(x-1)^5+3(x-1)^4+5(x-1)^3+3(x-1)^2+5.$

**29.** Koristiti činjenice da je $1+x+x^2+\ldots+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$, $(x\neq 1)$; $1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=\dfrac{x^n-1}{x-1}$, $(x\neq 1)$; $1+x+x^2+\ldots+x^{n+1}=\dfrac{x^{n+2}-1}{x-1}$, $(x\neq 1)$.

**30.** Kako je $x^2+x+1=(x-\alpha)(x-\alpha^2)$, $\alpha=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$, polinom $P(x)$ djeljiv je sa $x^2+x+1$ ako i samo ako je $(\alpha+1)^n-\alpha^n-1=0$ i $(\alpha^2+1)^n-\alpha^{2n}-1=0$. Kako je $\alpha+1=-\alpha^2$ i $\alpha^2+1=-\alpha$, ove jednakosti postaju $\alpha^{2n}-\alpha^n-1=0$ i $\alpha^n-\alpha^{2n}-1=0$, odakle poslije sabiranja proizilazi $-2=0$. Zaključujemo da je tvrđenje iskazano u zadatku tačno.

**31.** Uslov (1) kazuje da je polinom $P(x)+1$ djeljiv sa $(x-1)^3$. To znači da je izvod tog polinoma, tj. $P'(x)$, djeljiv sa $(x-1)^2$. Iz uslova (2) slijedi da je izvod polinoma $P(x)-1$, tj. $P'(x)$ djeljiv sa $(x+1)^2$. Kako je, po pretpostavci, $P(x)$ polinom petog stepena, može se pisati $P'(x)=A(x^2-1)^2$ ($A$ je konstanta). Iz ove jednačine izlazi $P(x)=A\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\right)+B$, gdje je $B$ konstanta. Budući da je $P(1)=-1$, $P(-1)=1$, traženi polinom $P(x)$ ima oblik $P(x)=-\frac{3}{8}x^5+\frac{5}{4}x^3-\frac{15}{8}x$.

**32.** Označimo date uslove $6|P(2)$ i $6|P(3)$ sa (1). Imamo:

(2) $P(x)-P(2)=(x-2)Q_1(x)$; $P(x)-P(3)=(x-3)Q_2(x)$.

$Q_1(x)$ i $Q_2(x)$ su polinomi čiji je stepen $n-1$ ako je $n$ stepen polinoma $P(x)$. Koeficijenti polinoma $Q_1(x)$ i $Q_2(x)$ su cijeli brojevi. Iz (2) za $x=5$ dobija se:

(3) $P(5)-P(2)=3Q_1(5)$: $P(5)-P(3)=2Q_2(5)$.

Na osnovu uslova (1) i relacija (3) zaključuje se

$\{3|P(5)$ i $2|P(5)\}\Rightarrow 6|P(5)$.

**33.** a) Treba da je $(x^2+mx-1)(x-a)=x^3+px+q$, što je prema principu identiteta polinoma

$\Leftrightarrow a=q\wedge -am-1=p\wedge m-a-0\Leftrightarrow m=q\wedge p=-q^2-1\ (\wedge a=m)$;

b) treba da je $(x^2+mx+1)(x^2+ax+b)=x^4+px^2+q$

$\Leftrightarrow a+m=0\wedge 1+am+b=p\wedge a+bm=0\wedge b=q$

$\Leftrightarrow (m=0\wedge p=q+1)\vee(q=1\wedge p=2-m^2)(a=-m,\ b=q)$.

**34.** Očito je $P_n(r)=\sum\limits_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}=(1-1)^r=0$, $r=\overline{1,n}$, te je prema teoremi 4. $P_n(x)=(-1)^n\dfrac{1}{n!}(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$.

**35.** a) $(x+1)^4-2(x+1)^3-3(x+1)^2+4(x+1)+1$;

b) $(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1$; c) $(x-2)^4-18(x-2)+38$;

d) $(x+i)^4-2i(x+i)^3-(1+i)(x+i)^2-5(x+i)+7+5i$.

**36.** Razviti $P(x)$ po stepenima od $x-3$, a zatim zamijeniti $x-3$ sa $x+3$. Dobije se $P(x+3)=x^4+11x^3+45x^2+81x+55$.

**37.** Odrediti nule polinoma i najstariji koeficijent. Dobije se

a) $2^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(x-\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi\right)$; b) $2\prod\limits_{k=1}^{n}\left(x+\dfrac{\sin\left(a+\frac{2k-1}{2n}\pi\right)}{\sin\frac{2k-1}{2n}\pi}\right)$.

**38.** a) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$; b) $(x^2+3)(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)$;

c) $\left(x^2+2x+1+\sqrt{2}-2(x+1)\sqrt{(\sqrt{2}+1)/2}\right)\left(x^2+2x+1+\sqrt{2}+2(x+1)\sqrt{(\sqrt{2}+1)/2}\right)$,

d) $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2\cdot 2^{1/2n}x\cos\dfrac{8k+1}{4n}\pi+2^{1/n}\right)$; e) $(x^2-x\sqrt{a+2}+1)(x^2+x\sqrt{a+2}+1)$.

**40.** Ako je datâ pretpostavka tačna, tada je

$(x^2+ax+1)(x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+2)=x^6-15x^3-8x^2+2$,

odakle se na osnovu principa identiteta polinoma dobije sistem jednačina

(1) $a+A=0$,

(2) $1+aA+B=0$,

(3) $A+aB+C=-15$,

(4) $B+aC+2=-8$,

(5) $C+2a=0$.

Iz (1), (2) i (5) izlazi $(A, B, C)=(-a, a^2-1, -2a)$, te uvrštavanjem tih vrijednosti u jednačine (3) i (4) dobijamo:

$a^3-4a+15=0\wedge a^2=9$, tj. $a=-3$ (pošto $a=3$ ne zadovoljava prvu jednačinu).

**41.** Može se dokazati opštiji rezultat

(*) $\dfrac{1}{(x-a)^n(x-b)^n}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n+k-1}{n-1}\dfrac{1}{(a-b)^{n+k}}\cdot\left(\dfrac{1}{(x-a)^{n-k}}+(-1)^{n-k}\cdot\dfrac{1}{(x-b)^{n-k}}\right)$.

Rezultati (1), (2) i (3) se dobiju iz (*) za $n=1, 2, 3$ respektivno. Dokazati matematičkom inducijom da (*) vrijedi za sve $n\in N$.